Collection « Approfondissement de la Connaissance Économique »
dirigée par Bernard LASSUDRIE-DUCHÊNE

Antonio MELE

DYNAMIQUES NON LINÉAIRES, VOLATILITÉ ET ÉQUILIBRE

Prix Gaëtan Pirou Prix Henri Vouters

Ouvrage honoré d'une subvention du Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

ECONOMICA

CHAPITRE 5

Analyse empirique

Ce chapitre se propose d'illustrer le contenu empirique de certains aspects de la théorie présentée jusqu'à présent. Son premier objectif consiste à montrer qu'une grande partie des non linéarités des séries temporelles à notre disposition peut être expliquée par l'instabilité de la volatilité au cours du temps. Si cette conclusion ne constitue pas une exception aux résultats de ces dernières années, elle est obtenue cependant au travers d'une explicitation assez générale de la dynamique de la volatilité. Un deuxième objectif est de mettre en évidence le gain que l'on peut obtenir en prenant en considération certains éléments de la théorie asymptotique [1] développée dans le chapitre précédent. Nous suivrons en particulier une approche de Monte-Carlo pour la valorisation des options européennes avec volatilité stochastique ; les résultats qu'on obtiendra seront comparés aux résultats auxquels on pourrait aboutir à partir des premiers résultats d'approximations de Nelson (1990). On développera des tests simples visant à apprécier le niveau de généralité de notre théorie par rapport à celle de Nelson ; ce sont des tests basés sur les bandes de confiance calculées à partir des erreurs expérimentales de l'approche de Monte-Carlo, et qui indiquent que notre théorie est «statistiquement plus générale» que celle de Nelson.

La section suivante expose certaines procédures de tests de non linéarité tandis que la Section 5.2 fournit une description succinte de la base des données utilisée dans ce travail. Les tests de non linéarité ainsi que l'estimation de certains modèles exposés au chapitre précédent sont présentés à la Section 5.3. La dernière section est consacrée à la mise en œuvre de l'approche de Monte-Carlo. Les tableaux contenant les résultats des tests et des estimations sont fournis en annexe.

5.1. Les procédures statistiques

Nous avons indiqué dans le Chapitre 1 Section 1.2 que les tests de non linéarité utilisés dans ce travail se basent sur la théorie de reconstruction

[1] «$h \downarrow 0$ et $hk \to \infty$».

de l'espace des phases par décalage dans le temps. Une approche probabiliste de cette théorie a été développée par Brock, Dechert et Scheinkman (1987) : elle consiste à déceler les propriétés asymptotiques de certaines fonctions continues de l'intégrale de corrélation. Cette approche peut donner lieu à diverses typologies de test. Nous ne nous intéressons qu'à deux de ces tests dans ce chapitre : la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman (1987) et le test de l'entropie de Brock et Baek (1991). De plus, nous nous bornons ici à suivre une approche univariée de cette théorie ; le lecteur peut se reporter à Hiemstra et Jones (1994) pour une application à un cas bivarié.

Le test de Brock, Dechert et Scheinkman (1987) est un test général d'indépendance. Brock, Hsieh et LeBaron (1991 Chapitre 2) ont montré que le test en question peut rejeter l'hypothèse qu'une série est la réalisation d'un processus i.i.d. si cette série est générée par un processus stochastique linéaire. Cette circonstance pourrait empêcher la compréhension de la cause de non indépendance d'une série temporelle : processus stochastique linéaire ou processus générateur non linéaire. Une manière naturelle pour faire face à ce problème consiste à appliquer un filtre linéaire à la série temporelle étudiée : la théorie traditionnelle d'identification des filtres linéaires devrait pouvoir guider cette étape. Une deuxième étape consiste en revanche à appliquer la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman à la série filtrée ; si, dans ce cas, l'on continue à refuser l'hypothèse que la série en considération a été engendrée par un processus i.i.d., il existe des raisons pour soupçonner que la cause du rejet est la présence d'un processus générateur de type non linéaire.

Cette procédure à deux étapes est fortement justifiée sur le plan théorique. Il existe à ce propos des résultats permettant d'établir que les caractéristiques topologiques des séries filtrées sont les mêmes que les données de départ : il s'agit de résultats qui seront commentés un peu plus en détail dans la sous-section suivante. De plus, Brock, Hsieh et LeBaron (1991) proposent ce test

> «... en tant que test portemanteau, à l'instar du test Q suggéré par Box et Jenkins (1970) dans un contexte linéaire.» (p. 8)

Nous avons des contre-arguments à cette dernière idée. Il existe d'abord une théorie bien précise concernant la manière par laquelle doit-on se servir du test Q : calcul récursif en correspondance des différents retards et prise de décision automatique en correspondance des retards où le test est significatif. Après tout, le test Q s'inscrit dans la méthodologie générale identification-estimation-contrôle des modèles linéaires. Les procédures étudiées par Brock, Hsieh et LeBaron (1991) ne sont pourtant pas «constructives» : une fois que l'on a rejeté l'hypothèse que la série a été générée par un processus i.i.d., on ne dispose plus de théories concernant la direction à suivre pour la construction d'un modèle[2].

[2] Ceci constitue l'une des raisons pour lesquelles nous avions introduit la notion d'inefficience «super-faible» dans Mele (1995, Chapitre 1).

Nous rappelons en outre que les statistiques que nous allons exploiter dans la Section 5.3 sont basées sur l'intégrale de corrélation présenté au Chapitre 1[3], et dépendent ainsi de deux paramètres de nuisance, qui sont la dimension de plongement du système artificiel (m) et le critère de voisinage des observations (ε)[4], dont le choix n'est suggéré par aucune théorie. Un deuxième problème associé avec la procédure en question concerne la nature du filtre à appliquer aux données de départ ; il existe en particulier des situations importantes où les caractéristiques topologiques des séries filtrées ne sont pas exactement les mêmes que celles des séries de départ : tel est malheureusement le cas des filtres de type ARCH !

Il est aisé de montrer que le test de l'entropie de Brock et Baek conserve les mêmes propriétés que le test de Brock, Dechert et Scheinkman[5]. Ainsi, les remarques précédentes devraient pouvoir s'appliquer de manière similaire au test de l'entropie. Néanmoins, le test de l'entropie donne des indications plus précises quant à la potentialité prédictive de l'économètre. Avant la proposition de ce test, il n'était question que du calcul de l'entropie de Kolmogorov-Sinaï à travers la Formule (approchée) 1.7 du Chapitre 1 ; le test de l'entropie permet ainsi de compléter l'analyse à travers la construction de bandes de confiance autour de cette estimation. Comme la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman et la statistique de l'entropie se basent sur la théorie asymptotique de l'intégrale de corrélation, l'application des deux tests pour chacune des séries temporelles à notre disposition devrait permettre également de contrôler nos résultats de façon croisée. Ce travail est le premier à appliquer de façon intensive le test de l'entropie à des séries temporelles financières de longue durée et à haute fréquence.

5.1.1. *Tests basés sur l'intégrale de corrélation*

Les Relations 1.6 et 1.11 du premier chapitre constituent ici le point de départ. Nous rappelons que la Relation 1.11 a été dérivée sous l'hypothèse que le signal objet d'étude est issu d'un processus i.i.d. ; en combinant ces deux relations,

$$C_{\varepsilon,m,T} \to C^m_{\varepsilon,1} \quad (\text{pour } T^{-1} \text{ petit}). \tag{5.1}$$

Le résultat suivant, dû originairement à Brock, Dechert et Scheinkman (1987), établit le comportement asymptotique de la différence

$$C_{\varepsilon,m,T} - C^m_{\varepsilon,1,T}$$

[3] Cf. Formule 1.5.

[4] Nous sommes en train de commettre un abus de langage en qualifiant ces paramètres de «paramètres de nuisance» : ε et m ne constituent pas, dans ce travail, des paramètres à «estimer», mais des données exogènes.

[5] Cf. Brock et Baek (1991).

5.1 Théorème.
Soit $\{x_t\}_{t=0,1,\ldots}$ une suite issue d'un processus i.i.d. et $\{x_t^m\}_{t=m,\ldots,T}$ le système artificiel associé de dimension m. Alors, lorsque $T \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{T}\left(C_{\varepsilon,m,T} - C^m_{\varepsilon,1,T}\right)}{\sigma_{\varepsilon,m,T}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

où

$$\sigma^2_{\varepsilon,m,T} = 4\left(K^m + 2\sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} C^{2j}_{\varepsilon,1,T} + (m-1)^2 C^{2m}_{\varepsilon,1,T} - m^2 K C^{2(m-1)}_{\varepsilon,1,T}\right),$$

$$K = \left(\frac{T_m(T_m-1)\,(T_m-2)}{6}\right)^{-1} \sum_{t<s<r} h_\varepsilon(x_t^m,\ x_s^m,\ x_r^m),$$

$$h_\varepsilon(a,\ b,\ c) = \frac{1}{3}\ (H_\varepsilon(a,\ b)\ H_\varepsilon(b,\ c) + H_\varepsilon(a,\ c)\ H_\varepsilon(c,\ b)$$

$$+H_\varepsilon(b,\ a)\ H_\varepsilon(a,\ c)),$$

$$H_\varepsilon(x,\ y) = H(\varepsilon - \|y-x\|_{\sup}) \quad \text{(la fonction d'Heavyside).}$$

Démonstration. Voir, par exemple, Brock, Hsieh et LeBaron (1991, p. 42-45 Théorème 2.1). ■

Ainsi que nous l'avons annoncé précédemment, le problème principal lié à la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman est l'absence d'alternative à l'hypothèse nulle que $\{x_t\}_{t=0,1,\ldots}$ est issu d'un processus i.i.d. ; Brock, Hsieh et LeBaron (1991) montrent cependant que cette statistique est très puissante quant au rejet de l'hypothèse nulle dans le cas où la cause de ce rejet est due à la présence de chaos déterministe. Ils montrent également que le comportement de ce test devient régulier à partir d'échantillons de 500 observations et fournissent quelques détails techniques concernant le choix de m et ε ; ce sont des détails qui vont être présentés succintement ci-après.

L'approche de Brock, Dechert et Scheinkman est importante puisqu'elle permet de déterminer les propriétés asymptotiques d'autres mesures de dimension. Tel est le cas, par exemple, de l'indice d'entropie de Kolmogorov-Sinaï présenté au Chapitre 1 [6]; on rappelle ici que, en termes heuristiques, cet indice mesure la quantité d'information nécessaire à la prévision de la trajectoire d'un système. Dans le Chapitre 1, on avait fait référence à la notion de sensibilité aux conditions initiales pour illustrer cette circonstance : un processus déterministe-chaotique pourrait être

[6] Cf. Formule 1.3.

prévu localement et son entropie n'est pas par conséquent infinie ; néanmoins, la sensibilité aux conditions initiales empêche sa prévision à long terme et son entropie n'est pas par conséquent nulle non plus [7].

Il s'agit maintenant d'illustrer comment l'approche de Brock, Dechert et Scheinkman peut aider à développer une théorie asymptotique pour l'entropie de Kolmogorov-Sinaï. Reprenons à ce propos l'analyse du Chapitre 1 ; nous avions signalé que lorsque $m^{-1} \approx \varepsilon << 1$,

$$\underline{\kappa} \equiv h^{-1}(\ln\ C_{\varepsilon,m} - \ln\ C_{\varepsilon,m+1})$$

constitue une approximation par défaut de $\mathcal{E}$ de la Formule 1.3. Nous souhaitons à présent fournir l'intuition de cette circonstance. Posons $h \equiv 1$. Si un signal est généré par un processus déterministe linéaire, $C_{\varepsilon,m} = C_{\varepsilon,m+1}\ \forall m$, et donc :

$$\underline{\kappa} \to 0\ ;$$

si en revanche le signal est généré par un processus ayant un grand nombre de degrés de liberté,

$$\underline{\kappa} \to \infty\ ;$$

dans le cas enfin où le signal est généré par un processus à dimensions réduites, le rapport $\dfrac{C_{\varepsilon,m}}{C_{\varepsilon,m+1}}$ tend vers une constante lorsque $m^{-1} \approx \varepsilon << 1$, et

$$0 \le \underline{\kappa} < \infty.$$

Considérons à présent l'estimateur de l'Entropie de Kolmogorov-Sinaï suivant :

$$\underline{\kappa}_T = \ln\ C_{\varepsilon,m,T} - \ln\ C_{\varepsilon,m+1,T}.$$

On a alors, d'après la Relation 5.1,

$$\underline{\kappa}_T \to -\ln\ C_{\varepsilon,1}.$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'indépendance du signal,

$$\underline{\kappa}_T \uparrow \infty, \quad \text{lorsque } \varepsilon \downarrow 0.$$

Il ne reste plus qu'à calculer la variance de $\sqrt{T}.\underline{\kappa}_T$ lorsque $T \to \infty$. Ceci a été effectué par Brock et Baek (1991, p. 712-713) :

[7] L'intuition suggère par ailleurs l'existence d'un lien entre entropie de Kolmogorov-Sinaï et exposants de Lyapunov. En fait, entropie et exposants de Lyapunov sont liés par l'intermédiaire de l'identité de Pesin : $\mathcal{E} = \sum_i \mathrm{Ly}_i^+$, où Ly_i^+ désignent les exposants positifs de Lyapunov (voir Eckmann et Ruelle 1985).

5.2 Théorème.
Soit $\{x_t\}_{t=0,1,\ldots}$ une suite issue d'un processus i.i.d. et $\{x_t^m\}_{t=m,\ldots,T}$ son système artificiel associé de dimension m. Alors, lorsque $T \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{T}\,(\underline{\kappa}_T + \ln\, C_{\varepsilon,1,T})}{{}_{\kappa}\sigma_{\varepsilon,m,T}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

où

$${}_{\kappa}\sigma^2_{\varepsilon,m,T} = 4\left(\frac{K^{m+1}}{C^{2(m+1)}_{\varepsilon,1,T}} - \frac{K^m}{C^{2m}_{\varepsilon,1,T}} + \frac{K}{C^2_{\varepsilon,1,T}} - 1\right).$$

L'apport novateur de ce théorème est qu'il permet d'établir la significativité du niveau d'entropie associé à une série temporelle donnée. Ceci présente un intérêt immédiat ; en effet, ainsi que Brock et Baek (1991) l'ont remarqué,

> «... si l'application de ce test conduit à refuser l'hypothèse i.i.d., le système artificiel $\{x_t^m\}_{t=m,\ldots,T}$ ne contient aucune information pouvant permettre une prévision du système observé». (p. 705)

◇ – ◇ – ◇

Le but final de cette sous-section consiste à mettre en évidence les limites principales des tests résumés par les Théorèmes 5.1 et 5.2 précédents ainsi que la manière par laquelle les difficultés en question peuvent être palliées.

La première difficulté provient du choix concernant la dimension de plongement m du Système artificiel 1.4 construit dans le premier chapitre. On observe en effet que si d'un côté l'application du Théorème de Takens nécessite une valeur de m élevée[8], le choix d'un m élevé comporte d'un autre côté un nombre réduit d'observations artificielles non-imbriquées (égal à $[T/m]$)[9].

En ce qui concerne en revanche le choix de la mesure de voisinage ε des observations artificielles, nous rappelons qu'un calcul approprié de l'intégrale de corrélation devrait se baser sur un $\varepsilon << 1$; c'est une condition nécessaire au développement de la théorie de Takens esquissée au cours du Chapitre 1 Section 1.2. Le choix d'une valeur très petite de ε entraîne cependant l'existence de peu d'observations artificielles «ε-voisines». Supposons, par exemple, de choisir une valeur élevée pour m et une valeur faible pour ε. Il s'agit d'une situation idéale sur le plan strictement théorique : cette situation pourrait toutefois conduire à des résultats difficiles à interpréter, puisqu'un m élevé implique un nombre réduit d'observations artificielles non-imbriqués et qui plus est ces observations auront une probabilité très basse d'être ε-voisines pour ε faibles.

[8] Cf. à ce propos nos commentaires après la Formule 1.4.

[9] Idem.

Liu (1990) suggère cependant que le choix de m est moins important que le choix de ε dans des échantillons de nombre élevé. Cette circonstance est également documentée par les expériences de Monte-Carlo menées par Brock, Hsieh et LeBaron (1991 Chapitre 2), et visant à étudier le comportement de la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman dans des échantillons de nombre réduit (1000 points au maximum). Les auteurs montrent que la distribution asymptotique de la statistique est bien approximée par la distribution simulée à partir seulement d'une dimension d'échantillon supérieure à 500. Ils montrent également que le comportement de cette statistique est suffisamment régulier pour un nombre d'observations artificielles non imbriquées supérieur à 200, avec $m \leq 5$. Ces résultats ont été obtenus en choisissant $\varepsilon/\sigma = 0,25,\ 0,5,\ 1,\ 1,5,\ 2$, où σ désigne l'écart-type de l'échantillon. Comme Liu (1990), Brock, Hsieh et LeBaron reportent que le comportement du test est très sensible au choix de ε ; néanmoins, il semblerait que le comportement de ce test soit suffisamment régulier pour $\varepsilon/\sigma \geq 1$.

Les expériences de Brock, Hsieh et LeBaron ont été effectuées en exploitant divers processus générateurs i.i.d. : processus normaux, t de Student avec 3 degrés de liberté, chi-deux avec 4 degrés de liberté, Laplace, Uniforms, et Lois Bimodales. La statistique de Brock, Dechert et Scheinkman semble ne pas se comporter de manière cohérente avec la théorie asymptotique lorsque les distributions uniformes et bimodales sont concernées. Néanmoins, cette dernière circonstance ne devrait pas poser de problèmes importants dans la pratique ; la raison en est que les données financières à haute fréquence ne semblent pas être générées par des Lois Uniformes ou Bimodales (cf. Hsieh 1991). Il est primordial, pourtant, de rendre compte de la forme de la distribution des données à notre disposition. En particulier, l'étendue de cette distribution devrait jouer un rôle important pour la simple raison qu'elle peut donner une idée de la mesure de voisinage des points. Nous rendrons compte de cette circonstance dans notre application de la Section 5.3.

Brock, Hsieh et LeBaron étudient également le comportement de l'intégrale de corrélation en correspondance de différents processus générateurs de type linéaire et de type non linéaire. Cette étude est basée sur la propriété fondamentale de l'intégrale de corrélation pour des processus i.i.d. résumée par la Formule 5.1 de ce chapitre. En effet, les auteurs montrent que la différence $C_{\varepsilon,m,T} - C^m_{\varepsilon,1}$ est significative pour chacun des modèles considérés[10]. Une procédure «à deux étapes» se rend donc nécessaire afin d'établir la cause d'un possible rejet : le Théorème 2.2 de Brock, Hsieh et LeBaron (1991, p. 64-66) établit à ce propos que les propriétés topo-

[10] Voici pourtant un contre-exemple : Dechert (1988) montre que $C_{\varepsilon,m,T} - C^m_{\varepsilon,1}$ est proche de zéro en correspondance de certains processus non i.i.d. et, comme souligné par Brock, Hsieh, et LeBaron (1991, p. 47), la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman pourrait ainsi ne pas être capable de déceler certaines formes de non linéarités.

logiques d'un signal unique $\{x_t\}_{t=0,1,\ldots}$ sont équivalentes aux propriétés de $x_t(1-\varphi(L))$, où $\varphi(L)$ est un polynôme en L, l'opérateur retard. Nous appliquerons par conséquent, dans la Section 5.3, un filtre AR aux données de départ, dont l'ordre sera déterminé à partir de critères opportuns. Nous appliquerons dans une deuxième étape la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman et le test de l'entropie aux résidus du modèle linéaire. Si les deux tests d'indépendance rejettent l'hypothèse i.i.d., nous aurons des raisons pour soupçonner l'existence d'un processus générateur plus complexe qu'un processus AR de type linéaire. Nous n'aurons cependant pas d'indications supplémentaires quant à la direction à suivre pour identifier ce processus. La statistique de Brock, Dechert et Scheinkman, par exemple, nous informe qu'en ce cas la série temporelle sous enquête a été générée par un processus non indépendant de type non linéaire, et le test de l'entropie nous dira qu'il existe un potentiel prédictif dans les résidus du modèle linéaire. Aucune suggestion supplémentaire ne sera fournie.

5.1.2. Tests classiques d'hétéroscédasticité conditionnelle

Nous essayons dans ce chapitre d'expliciter le pouvoir prédictif auquel l'on faisait allusion à la fin de la sous-section précédente à travers le modèle P-ARCH exposé au Chapitre 4. Nous employons également une distribution généralisée des erreurs pour rendre compte des caractéristiques statistiques des données à notre disposition.

Un aspect contraignant concernant l'usage du modèle P-ARCH est que les conditions permettant l'application d'une procédure à deux étapes ne sont pas valables dans ce cas. Soit, par exemple, $\widehat{\xi}_t$ le résidu obtenu après l'estimation d'un modèle ARCH, et $\widehat{\sigma}_t$ l'estimation de son écart-type conditionnel ; par construction, les résidus standardisés $\widehat{u}_t := \widehat{\xi}_t/\widehat{\sigma}_t$ devraient être i.i.d. si le modèle retenu est bien spécifié. Cependant, les procédures de contrôle de l'indépendance de $\widehat{u}_t$ basées sur l'intégrale de corrélation pourraient fournir des résultats difficiles à interpréter. La procédure d'estimation d'un modèle ARCH repose typiquement sur des algoritmes d'optimisation non linéaire [11], et Brock, Hsieh et LeBaron montrent que les conclusions de leur Théorème 2.2 sont très sensibles à la procédure d'estimation. L'application de la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman aux résidus standardisés $\widehat{u}_t$ conduit en particulier trop souvent à ne pas refuser l'hypothèse d'une mauvaise spécification du modèle ARCH retenu en phase d'estimation [12].

[11] Cf. Section 5.3.

[12] Ceci ne devrait pas être surprenant. Nelson et Foster (1994) ont montré qu'un modèle ARCH appliqué à des données à haute fréquence est capable d'approximer sans biais la vraie mesure de volatilité d'un certain processus en temps continu. En conséquence, si la non indépendance des observations est due principalement à l'instabilité de la volatilité au cours du temps, un modèle de type ARCH devrait pouvoir en tenir compte.

Deux voies de résolution peuvent être envisagées. La première consiste à calculer la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman sur $\widehat{u}_t$ un nombre de fois élevé à travers la *méthode de bootstrap* ; ici, nous ne suivrons pas cette procédure. Une deuxième méthode renvoie à comparer nos résultats avec ceux déjà existants. On cherche en particulier d'abord à vérifier si nos résultats sont cohérents avec l'hypothèse i.i.d. D'après le Théorème 5.1, en effet, la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman est asymptotiquement normale si les résidus standardisés sont indépendants. Si cela n'est pas le cas, nous avons une forte évidence que le modèle ARCH que l'on a employé est malspécifié ; si cela est le cas, on compare alors les valeurs des tests avec les distributions du test tabulées par Brock, Hsieh et LeBaron (1991), et Hsieh (1991). Ces distributions ont été calculées à partir de modèles ARCH moins performants que le modèle P-ARCH ; nous le prouverons dans la Section 5.3 ; par conséquent, si nos résultats indiquent que l'hypothèse i.i.d. ne peut pas être rejetée d'après les valeurs tabulées par Brock, Hsieh et LeBaron, et Hsieh, nous aurons de fortes raisons d'établir que le modèle ARCH retenu n'est pas malspécifié. Des tests «ad hoc» pour le contrôle de l'orthogonalité de certains moments conditionnels des résidus sont en tout cas nécessaires, et ils serviront, encore une fois, à contrôler de manière croisée nos résultats finaux.

Brock, Hsieh et LeBaron (1991) ont également comparé le pouvoir de détection de non indépendance du test de Brock, Dechert et Scheinkman avec d'autres types de test de non linéarité. Tel est le cas du test du bispectre de Hinich (1982), du test de non linéarité de Tsay (1986), ou du test TR^2 de Engle (1982). Les deux premiers tests ont une grande puissance, mais le test de Tsay n'est pas capable de détecter des effets de type ARCH ; la raison en est que ce test est basé sur les cumulants d'ordre trois :

$$\mathrm{Cum}_{xxx}\,(i,\ j) = E(x_t,\ x_{t-i},\ x_{t-j}),$$

qui sont zéro dans le cas de processus générateurs de type ARCH. De la même façon, le test de Hinich ne devrait pas posséder une grande puissance pour la détection d'effets ARCH puisque ce test est basé sur la transformée double de Fourier des cumulants d'ordre trois [13].

Le test de Engle pour l'hétéroscédasticité conditionnelle consiste en la régression du carré des résidus d'un modèle donné sur un nombre p de ses valeurs retardées :

$$\xi_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_{t-i}^2 + \mathrm{res}_t \quad (t = 2,\ \ldots,\ T),$$

où T désigne la taille de l'échantillon, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1,\ \ldots,\ p)$ et $\{\mathrm{res}\}$ est la suite des résidus de la régression. Soit R^2 le coefficient de détermination de cette régression. Sous l'hypothèse nulle d'inexistence d'effets ARCH :

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0,$$

[13] Cf. par exemple Granger et Teräsvirta (1993, p. 20 Formule 2.2.4).

$T \cdot R^2$ est distribué asymptotiquement selon un chi-deux avec p degrés de liberté.

Il existe d'autres procédures de test visant à détecter l'hétéroscédasticité dans une suite d'observations ; on pourrait les exploiter en tant que moyens de contrôle de présence résiduelle d'hétéroscédasticité. L'un de ces tests consiste en la régression du changement en pourcentage des résidus au carré par rapport à la variance conditionnelle sur le gradient de la variance conditionnelle calculé par rapport aux paramètres qui font l'objet de test. Un autre test est le calcul du TR^2 après la première itération Berndt, Hall, Hall et Hausmann (1974) (cf. la Section 5.3). Bollerslev, Engle et Nelson (1994) fournissent une revue détaillée de ces procédures.

Il est important de mettre en relief que ces tests peuvent ne pas refuser l'hypothèse de présence d'effets ARCH même en l'absence d'effets ARCH. En effet, si un modèle est malspécifié en moyenne conditionnelle, les tests ne permettent pas de rejeter l'hypothèse d'effets ARCH : la raison en est que les erreurs dues à une mauvaise spécification peuvent induire une corrélation sérielle, ou des non linéarités en général, sur les erreurs de prévision au carré. McLeod et Li (1983) montrent à ce propos que la fonction d'autocorrélation des résidus au carré peut être utilisée pour la détection de non linéarités en général. Considérons par exemple le modèle[14] :

$$y_t = \beta_t x_t + \xi_t, \quad \xi_t \approx N(0,\ \sigma^2),$$

où β_t est un vecteur de paramètres réels et stochastiques de dimension conformable à x_t, son vecteur de variables faiblement exogènes et $\mathcal{I}_{t-1}$ mesurables, avec ξ et x indépendants, et

$$\begin{cases} E(\beta_t \mid \mathcal{I}_{t-1}) \equiv \beta^* < \infty, \\ \text{var}\ (\beta_t \mid \mathcal{I}_{t-1}) = \phi < \infty, \\ E(\beta_s \cdot \beta_t \mid \mathcal{I}_{s-1}) = 0 \quad (s < t) \\ E(\beta \cdot \xi) = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{I}_t$ désigne, comme d'habitude, l'ensemble d'informations au temps t. On aura, dans le cas où x_t est un scalaire,

$$\begin{cases} E(y_t \mid \mathcal{I}_{t-1}) = \beta^* x_t \\ \text{var}\ (y_t \mid \mathcal{I}_{t-1}) = \sigma^2 + \phi x_t^2 \end{cases}$$

un modèle conditionnellement hétéroscédastique ; si, de plus,

$$x_t := \xi_{t-1} \quad (\forall t),$$

on obtiendra exactement un modèle ARCH. Dans ce cas, le fait que β est stochastique peut être considéré comme l'effet d'une mauvaise spécification ne concernant que la moyenne conditionnelle du modèle.

[14] Cet exemple s'inspire de Granger et Teräsvirta (1993, p. 45-46).

Encore faut-il souligner que le test TR^2 de Engle et les tests décrits par Bollerslev, Engle et Nelson sont des tests ad hoc. Ils visent à détecter une forme d'hétéroscédasticité de type essentiellement linéaire. D'autres formes d'hétéroscédasticité sont possibles. Tel est la cas, par exemple, de l'application à tente ou de la fonction logistique présentées dans le Chapitre 1 (cf. Formules 1.1 et 1.2). Ce sont des fonctions pouvant donner lieu à une dynamique chaotique et pourtant, le test de Engle, par exemple, qui vise à détecter des formes d'hétéroscédasticité *de type linéaire*, conduirait paradoxalement au rejet de l'hypothèse nulle d'hétéroscédasticité. Les tests basés sur l'intégrale de corrélation sont au contraire plus généraux et offrent effectivement la possibilité de déceler des non linéarités en général. C'est la raison pour laquelle nous nous servirons le plus souvent du test de Brock, Dechert et Scheinkman, et de la statistique de l'entropie dans ce chapitre. Ces tests seront utilisés et comme tests de départ et comme test de contrôle. Nous ferons également usage d'autres tests de contrôle ; il s'agit de tests formulés sous l'hypothèse nulle d'absence d'une mauvaise spécification et visent à contrôler l'orthogonalité de certains produits des moments conditionnels des résidus. Deux exemples de ce dernier type de tests sont

$$\sum_t (\widehat{u}_t \cdot |\widehat{u}_t|) = 0,$$

ou

$$\sum_t (\widehat{u}_t \cdot \widehat{u}_{t-1}) = 0.$$

5.2. La base des données

Nous employons une base de données constituée par des indices boursiers ; on dispose d'observations journalières et de clôture. Elles se référent à cinq pays : les Etats Unis (Dow Jones et S & P 500), l'Allemagne (Dax), la France (Cac-40), le Japon (Nse) et le Royaume Uni (Ft-100). Le tableau ci-dessous indique la période d'observation et la dimension d'échantillons pour chaque série.

Pays	Indices	Période	Dimension de l'échantillon
Etats-Unis	*Dow Jones et S & P 500*	03/1/1969-1/8/1994	6 673
Allemagne	*Dax*	02/1/1986-1/8/1994	2 238
France	*Cac-40*	05/1/1988-1/8/1994	1 714
Japon	*Nse*	12/8/1986-1/8/1994	2 080
Royaume-Uni	*Ft-100*	03/1/1984-1/8/1994	2 760

5.3. Dynamique non linéaire et volatilité

Si $\{S_t\}_{t=1,\ldots,T}$ désigne la suite de l'un des indices listés dans le tableau de la section précédente, nous définissons les différents taux de croissance comme :

$$y_t := \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \quad (t = 2, \ldots, T),$$

et appliquons ensuite, à chacun de ces $\{y_t\}_{t=2,\ldots,T}$, un filtre AR d'ordre p. Nous exploitons le critère de Schwarz (1978) pour sélectionner les différents p : pour les indices Dow Jones, S & P 500 et Nse, $p = 2$; pour les indices Cac-40 et Ft-100, $p = 1$; pour l'indice Dax, $p = 0$.

Soit $\widehat{y}_t$ le signal filtré ; les Tableaux 5.1a, 5.2a, 5.3-5.6 contiennent les résultats de l'application de la statistique de Brock, Dechert et Scheinkman (BDS) et du test de l'entropie de Brock et Baeck (entropie). Nous rappelons que sous l'hypothèse nulle que $\widehat{y}_t$ est issu d'un processus i.i.d., ces statistiques suivent asymptotiquement une loi normale réduite. Nous avons suivi la suggestion de Dechert (1988) concernant le choix de ε : il a été fixé en prenant en considération l'étendue de la distribution de $\widehat{y}_t$. Soit en particulier σ l'écart-type et rng l'étendue de la distribution de $\widehat{y}_t$; si

$$\sigma^* \equiv \frac{\sigma}{rng},$$

ε a été alors choisi égal à $0,75$, 1, $1,5$ et 2 fois σ^*. Les valeurs $0,75$, 1, $1,5$ et 2 ont été retenues en raison des expériences de Brock, Hsieh et LeBaron commentées dans la Section 5.1. La dimension de plongement m a été fixée à 2, 3, 4 et 5.

Les premiers résultats mettent indiscutablement en relief que toutes les séries temporelles à notre disposition ne sont pas issues de processus stochastiques de type linéaire : et le test BDS, et le test de l'entropie rejettent l'hypothèse i.i.d. de ces processus à tout niveau de confiance. L'étape suivante de l'analyse consiste à rechercher les raisons de cette circonstance.

En ce qui concerne les indices américains, la première explication naturelle renvoie à la présence de ruptures structurelles. Les Tableaux 5.1a et 5.2a se réfèrent à une période de 25 années ; il est difficile que la distribution des probabilités des observations soit restée la même pendant toute cette période. Nous appliquons par conséquent les mêmes tests à ces indices pour les sous-périodes 1969-1978, 1978-1988 et 1988-1994. Le Tableaux 5.1b-d et 5.2b-d montrent les résultats. Bien que l'hypothèse i.i.d. soit rejetée par la statistique BDS sur toutes les périodes, le test de l'entropie fournit globalement des valeurs plus basses dans la période 1988-1994. En outre, les valeurs des deux tests dans les trois périodes semblent pouvoir impliquer que la non indépendance des observations est plus modérée dans chacune de ces périodes que dans la période entière 1969-1994.

Nous passons alors à l'estimation d'un modèle de type ARCH pour toutes les séries et pour toutes les périodes considérées. Nous avons choisi

le modèle P-ARCH avec fonction de vraisemblance basée sur la g.e.d., la loi généralisée des erreurs (la forme analytique de cette distribution a été donnée au Chapitre 4 Section 4.3). La raison en est que le chapitre précédent a fourni une théorie concernant le comportement asymptotique de ce modèle[15] (dans le cas d'innovations g.e.d.) qui représente en outre l'un des modèles ARCH les plus généraux parmi ceux proposés jusqu'à présent.

Nous considérons alors un modèle du type :

$$\begin{cases} (1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2)\, y_t = \mu + \xi_t, \ \xi_t = u_t \,.\, \sigma_t, \ u_t \approx \text{i.i.g.e.d. } (\upsilon), \\ \sigma_{t+1} = \left(\omega + \alpha(|\xi_t| - \kappa\xi_t)^\delta + \beta\sigma_t^\delta\right)^{1/\delta} \end{cases} \tag{5.2}$$

où φ_1, φ_2, μ, ω, α, β, κ, δ et υ sont des paramètres réels et non stochastiques, satisfaisant les restrictions du chapitre précédent. Les retards pour tous les modèles sont ceux qui ont été retenus précédemment par l'intermédiaire du critère de Schwarz. La fonction de log-vraisemblance d'une seule observation s'écrit :

$$\ell_t = \ln\left(\frac{\upsilon}{\nabla_\upsilon}\right) - \left(1 + \frac{1}{\upsilon}\right) \ln 2 - \ln \Gamma\left(\frac{1}{\upsilon}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{|\xi_t|}{\nabla_\upsilon \sigma_t}\right)^\upsilon - \ln \sigma_t,$$

$$\nabla_\upsilon^2 \equiv \frac{\Gamma(\upsilon^{-1})}{2^{2/\upsilon}\Gamma(3\upsilon^{-1})}.$$

Nous passons ensuite à dériver des estimateurs des différents paramètres en exploitant l'algorithme de Berndt, Hall, Hall et Hausman (1974). Le Tableau 5.7 fournit les résultats. Les Tableaux 5.8-5.9 présentent les tests de spécification basés sur les moments conditionnels : ces tests semblent pouvoir indiquer que nos modèles sont raisonnablement bien spécifiés. Cette circonstance est généralement confirmée par les tests diagnostiques BDS et entropie (Tableaux 5.10-5.15) pour toutes les séries et pour toutes les périodes. Une exception significative est représentée par les indices américains pendant les périodes 1969-1994 et 1978-1988. Il existe également des problèmes dans la période 1969-1978 (Tableaux 5.10b et 5.11b).

L'évidence fournie jusqu'à présent nous donne alors quelques raisons pour croire que le rejet de l'hypothèse i.i.d. pour les observations américaines est due en partie à l'instabilité de la distribution des probabilités. En fait, une telle évidence est confirmée par le comportement des estimateurs de δ et υ. On observe (Tableaux 5.7a et 5.7b) que les estimateurs de δ et υ sont beaucoup plus faibles dans les deux premières périodes que dans la dernière ; l'estimateur de υ, en particulier, tend à baisser considérablement au cours de la période 1978-1988.

Nous avions souligné dans le chapitre précédent sous-Section 4.3.3 qu'il n'existe pas encore de théories convaincantes liant notre théorie

[15] Cf. la note 1 de ce chapitre.

d'approximation présentée dans le chapitre précédent avec le comportement de maximum de vraisemblance de υ et δ. Ceci n'empêche pas de procéder à présent à une discussion concernant le rôle des valeurs obtenues pour ces estimateurs dans l'établissement de la distribution à long terme des innovations aux Etats-Unis : la théorie du chapitre précédent est en effet valable une fois que l'on se donne un couple (δ, υ) ! En vertu de cette théorie, les circonstances qu'on a décrit précédemment impliquent alors que la distribution non conditionnelle des chocs est plus leptokurtique dans les premières périodes, ce qui entraîne que la probabilité d'événements extrêmes a été plus élevée dans ces périodes ; en d'autres termes, les périodes 1969-1978 et 1978-1988 ont été marquées par un niveau moyen de volatilité supérieur à celui de la période 1988-1994.

Ainsi, d'après ces résultats, il semblerait que des périodes de haute dépendance structurelle sont associés à des événements de haute volatilité ; ce phénomène est aussi intuitif, puisque l'hétéroscédasticité conditionnelle est la «signature» d'une dépendance du présent vis-à-vis du passé. Néanmoins, l'instabilité de la volatilité n'est pas encore capable d'expliquer la non indépendance des observations. Nous scindons alors la période 1978-1988 en deux sous-échantillons, 1978-1983 et 1983-1988, pour employer d'autres hypothèses distributionnelles que la g.e.d. ; les résultats finaux sont encore moins encourageants que ceux présentés aux Tableaux 5.10c et 5.11c. Si l'on attribue ce genre de résultats à la présence de ruptures structurelles très fréquentes dans le processus générateur des observations, toute enquête économétrique du type envisagé dans ce chapitre est dépourvue de sens[16].

◇ – ◇ – ◇

Deux phénomènes récurrents et singuliers semblent pouvoir caractériser la dynamique de la volatilité de nos séries temporelles. Le premier renvoie à l'*hypothèse de Granger et Ding* : nous avons expliqué au chapitre précédent sous-Section 4.3.3 que les auteurs ont proposé une approche à la modélisation des erreurs basée sur la distribution de Laplace. Cette hypothèse se traduit ici par $\upsilon = 1$. La dernière ligne des Tableaux 5.8 et 5.9 montre la statistique de Wald pour l'hypothèse nulle $\upsilon = 1$ (la distribution asymptotique de cette statistique est celle d'une loi chi-deux avec 1 degré de liberté sous cette hypothèse) : exception faite pour les indices américains dans la période 1969-1978, l'hypothèse nulle ne peut jamais être rejetée. Le deuxième phénomène constitue pour nous une surprise pour laquelle nous ne sommes parvenus à offrir aucune justification de nature économique ou statistique[17]: il concerne l'égalité entre υ et δ. Les troisièmes lignes en partant de la fin des Tableaux 5.8 et 5.9 montrent

[16] Hsieh (1991) parvient à une conclusion similaire.

[17] La section empirique du papier de Fornari et Mele (1997*c*) contient des résultats similaires se référant à des taux de change à haute fréquence.

que le test de Wald relatif est très peu significatif pour les séries temporelles examinées dans ce travail. On observe que ce résultat est valable aussi, dans le cas des indices américains, pour toute période considérée. Nous rappelons également que, dans ce cas, le Théorème 4.11 du chapitre précédent établit que la distribution stationnaire des innovations est une Loi de Student généralisée.

Il existe un dernier aspect qui mérite d'être commenté : il renvoie au problème $\upsilon = 1$ que nous venons de commenter. Les séries temporelles que nous venons d'analyser ne semblent pas être issues d'un processus conditionnellement normal : les résultats concernant le test de Wald de l'avant dernière ligne devraient pouvoir clarifier ce point. De même, l'hypothèse $\delta = 2$ n'est pratiquement jamais vérifiée (les statistiques relatives ne sont pas reportées). La section suivante vise à montrer les implications de ces phénomènes sur la valorisation des actifs contingents avec volatilité stochastique.

◇ – ◇ – ◇

Nous allons fournir en guise de conclusion de cette section des éléments concernant l'estimation des modèles à renversements de volatilité, introduits dans le chapitre précédent (cf. Equation 4.7). Nous nous bornons à l'Indice Dow Jones, faisons usage de l'échantillon entier, imposons aux résidus d'être conditionnellement normalement distribués, et obtenons les résultats suivants[18, 19] :

$$\begin{cases} \underset{[6,92396]}{(1 - 9,140 \cdot 10^{-2} L)} \cdot y_t = \underset{[1,48431]}{1,499 \cdot 10^{-4}} + \xi_t, \ \xi_t = u_t \cdot \sigma_t, \ u_t \approx N(0,1) \\ \sigma_{t+}^2 \qquad\qquad \underset{[54,68057]}{0,926} \ \boldsymbol{\sigma_t^2} \\ -(\underset{[9,89039]}{2,445 \cdot 10^{-2} \xi_t^2} + \underset{[5,39422]}{6,254 \cdot 10^{-2}} \ \sigma_t^2 - \underset{[4,21112]}{3,212 \cdot 10^{-6}}) \cdot \left(\frac{u}{|u|}\right)_t \end{cases}$$

(La fonction de log-vraisemblance est de l'ordre de 23320).

La Figure 5.1 montre l'évolution de

$$\iota_t := 2,445 \,.\, 10^{-2} \varepsilon_t^2 + 6,254 \,.\, 10^{-2} \sigma_t^2 - 3,212 \,.\, 10^{-6}$$

pour les 672 derniers points (correspondant environs aux deux dernières années et demie de l'échantillon). Nous rappelons[20] que le phénomène de

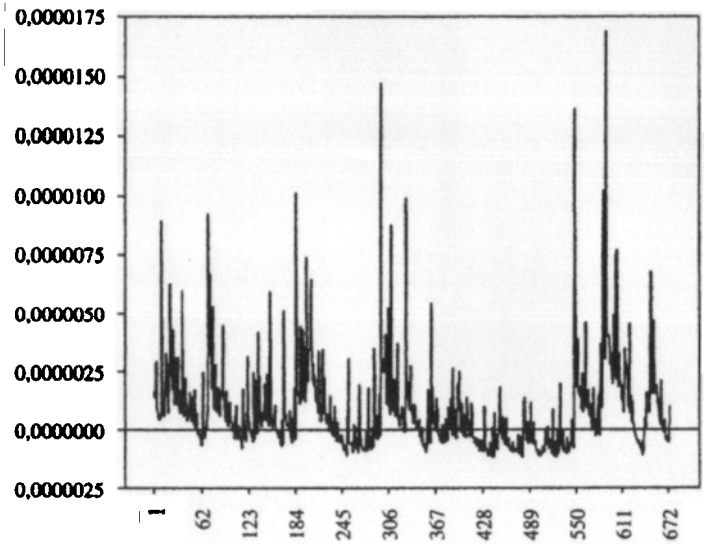
[18] t «robustes» entre crochets.

[19] Les tests diagnostiques (non reportés) suggèrent que l'hypothèse de normalité devrait être abandonnée.

[20] Cf. Chapitre 4 Section 4.1.

renversement de volatilité (les chocs positifs introduisent un niveau de volatilité plus élevé que les chocs négatifs de même taille) a lieu dans le cas où ι_t prend des valeurs négatives. Un examen attentif de l'évolution de ι_t pour tout l'échantillon[21] montre que ceci n'est pas souvent le cas, alors que l'échantillon de la Figure 5.1 constitue l'exemple dans lequel l'occurrence de ce phénomène est la plus fréquente. Dans le chapitre précédent, nous avions mis en évidence que si l'estimateur de $\tilde{\phi}_2$ est strictement positif, la probabilité d'observer des épisodes de renversements de volatilité est d'autant plus élevée que la volatilité de ces observations est petite[22]. Comme l'estimateur de ϕ_2 est ici de signe positif, l'estimation de ce dernier modèle confirme que la période concernant les dernières observations a été marquée par une probabilité d'observer des événements extrêmes inférieure à celle précédente.

Figure 5.1
Valeurs estimées de ι_t



5.4. Valorisation des actifs contingents avec volatilité stochastique : une approche de Monte-Carlo

Une approche de Monte-Carlo pour la valorisation des options européennes est proposée dans cette section : elle se base sur la théorie d'approximation développée au chapitre précédent. La finalité de cette opération est de montrer le gain d'utilité qu'une telle théorie permet par rapport à la théorie de base proposée originairement par Nelson (1990).

[21] Graphique non reporté.

[22] Cf. les commentaires fournis après la Formule 4.9.

Notre point de départ est le Système 3.5 du Chapitre 3 ; il s'agit de ce qu'on avait qualifié de schéma « 2×2 ». Dans cette maquette, la volatilité stochastique est *génératrice d'incomplétude*[23], et le premier choix à effectuer concerne donc la mesure de martingale équivalentes à P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour $\{e^{-rt}S_t\}_{t\in[0,T]}$. Ici, P est la probabilité objective, $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ est le processus de prix d'un actif primitif et $0 \leq r < \infty$ est le taux d'intérêt sans risque, une constante P-p.s. Notre choix porte sur $\tilde{Q}$, la *mesure minimale* ; de plus, nous supposons par la suite que Q est l'ensemble des mesures de martingale équivalentes à P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour $\{e^{-rt}S_t\}_{t\in[0,T]}$ *et* $\{e^{-rt}H_t\}_{t\in[0,T]}$, où $\{H_t\}_{t\in[0,T]}$ désigne le processus de prix de l'option européenne. Le lecteur trouvera tout au long du Chapitre 2 Section 2.3 et du Chapitre 3 Section 3.3 les arguments aussi bien en faveur que contre ces premières hypothèses.

Nous explicitons ensuite les formes fonctionnelles de $\varphi(\,.\,)$ et $\psi(\,.\,)$ au cas de Hull et White (1987) [24], en sélectionnant $\nu \equiv \sigma^2$, et en abandonnant cependant leur hypothèse concernant la nullité du « processus de corrélation » du prix avec la volatilité, que nous considérons en revanche être ρ, une constante P-p.s., non nécessairement égale à zéro ; ainsi, (φ, ψ, ρ) est dans ce chapitre un triplet de paramètres réels et non stochastiques. Nous rappelons également[25] qu'il n'existe pas dans ce cas des résultats généraux garantissant le fait que l'option complète effectivement le marché, mais cette circonstance n'interfère pas avec les développements que nous entendons poursuivre dans cette section.

Sous réserve d'admissibilité de toute stratégie incluant l'achat des actifs mentionnés jusqu'à présent, l'existence d'une telle mesure entraîne, d'après le Théorème 2.5 du Chapitre 2, l'absence d'opportunités d'arbitrage[26]. En outre, d'après le Théorème de Girsanov, le Lemme de Itô et le fait que la prime de risque pour la volatilité n'est pas compensée dans le cas de la mesure minimale[27], la dynamique du prix primitif s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dS}{S}\right)_t = r\,.\,dt + \sigma_t\, d\widetilde{\mathcal{W}}_t^{(1)} \\ d\,\ln\,\sigma_t^2 = -\left(\varphi + \dfrac{\psi^2}{2}\right)\, dt + \psi\left(\rho\, d\widetilde{\mathcal{W}}_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, d\widetilde{\mathcal{W}}_t^{(2)}\right) \end{cases} \tag{5.3}$$

sous $\tilde{Q}$; ici, $\{\widetilde{\mathcal{W}}_t^{(i)}\}_{t\in[0,T]}$ $(i = 1,\ 2)$ sont deux $\tilde{Q}$-$\mathcal{F}_t$-mouvements browniens standard.

Dans le cas où $\rho \equiv 0$, la deuxième équation de ce modèle constitue un cas particulier de la limite de diffusion du modèle P-ARCH donnée

[23] Au sens de la Définition 3.2 de la Section 3.1.

[24] Cf. la discussion menée avant la Formule 3.12 Chapitre 3.

[25] Cf. Chapitre 3 Remarque 3.4 ainsi que la discussion menée vers la fin de la Section 3.4.

[26] Au sens du Chapitre 2 Définition 2.4.

[27] Cf. Chapitre 3 Section 3.3.

dans le chapitre précédent Equation 4.14. D'après la discussion menée au Chapitre 4 Section 4.4, un modèle plus intéressant aurait donc pu être le Modèle 4.20, que nous ré-écrivons ici sous une forme qui permet de tenir compte du processus de corrélation entre le prix primitif et la volatilité :

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = \left(\frac{2\varpi}{\delta}\,\sigma_t^{2-\delta} - \frac{2\varphi + (1-2\delta^{-1})\,\psi^2}{\delta}\,\sigma_t^2\right)\mathrm{d}t$$
$$+\frac{2\psi}{\delta}\,\sigma_t^2\left(\rho\,\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{W}}_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{W}}_t^{(2)}\right) \tag{5.4}$$

Cependant, l'application empirique de cette section met en évidence que l'estimateur que nous proposons pour ϖ n'est pas significativement différent de zéro cas où, effectivement, l'équation précédente se réduit à la deuxième équation du Système 5.3. Le lecteur ayant l'intention de suivre notre approche devrait pourtant faire généralement référence à l'Equation 5.4 dans son application.

Comme les hypothèses de base de cette section coïncident grosso modo avec celles de Hull et White (1987), il est utile à présent de fournir quelques arguments justifiant la mise en œuvre d'une procédure de Monte-Carlo pour l'estimation du prix d'une option au lieu d'un usage direct de la Formule de Hull et White donnée au Chapitre 3 Formule 3.14. Il existe essentiellement deux raisons. Premièrement, nous sommes intéressés ici à comprendre si la théorie du chapitre précédent est vraiment importante dans des situations plus générales que celle présentée dans cette section. Un exemple d'une telle situation est l'Equation 5.4, où la Formule de Hull et White ne s'applique plus [28]; deuxièmement, la Formule de Hull et White ne rend pas compte du processus de corrélation des deux browniens.

◇ – ◇ – ◇

Cette section reprend l'analyse précédente concernant l'application de modèles de type ARCH à l'indice Dax. Nous allons par conséquent interpréter S_t comme l'indice Dax au temps t, en prenant en considération le cas abstrait d'une option européenne écrite sur cet indice et ayant une échéance

$$\tau = 60 \text{ jours.}$$

Ainsi qu'il a été annoncé au Chapitre 3 Section 3.5, le schéma d'approximation retenu ici est celui d'Euler ; nous prenons en considération un accroissements unitaires, et aboutissons aisément au système

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t\,\exp\left(r - \dfrac{\sigma_t^2}{2} + \sigma_t\,.\,\widetilde{u}_{t+1}\right) \\ \sigma_{t+1}^2 = \sigma_t^2\,\exp\left(-\left(\varphi + \dfrac{\psi^2}{2}\right) + \psi\left(\rho\,.\,\widetilde{u}_{t+1} + \sqrt{1-\rho^2}\,.\,\widetilde{n}_{t+1}\right)\right) \end{cases} \tag{5.5}$$

[28] Il ne semble cependant pas difficile de dériver une solution approchée (au sens du Chapitre 3 Section 3.3) dans le cas où $\delta = 2$, $0 < \varpi < \infty$ et $\rho = 0$ (P-p.s.).

où $\{\widetilde{u}_t\}_{t=1,2,\ldots,T}$ et $\{\widetilde{n}_t\}_{t=1,2,\ldots,T}$ désignent deux suites de variables normales réduites. Les estimateurs des différents paramètres entrant dans l'équation précédente seront obtenus par un modèle GARCH(1,1) avec fonction de vraisemblance normale, et le passage temps discret/temps continu sera effectué au travers des premiers résultats d'approximation de Nelson (1990), résumés dans les premières lignes du Tableau 4.2 Chapitre 4. Tout ceci est standard et constitue en fin de compte la procédure mise en œuvre par Lamoureux et Lastrapes (1993). De plus, dans cette section, nous simplifions l'analyse en supposant $r = 0$ P-p.s.

Une approche plus générale consiste à obtenir des estimateurs des paramètres à partir du modèle P-ARCH. Notons que dans ce cas l'équation de la volatilité à prendre en considération est l'Equation 5.4, que nous écrivons, dans le cas où $\varpi = 0$:

$$\sigma_{t+1}^2 = \sigma_t^2\,\exp\left(-\frac{2\varphi+\psi^2}{\delta} + \frac{2\psi}{\delta}\left(\rho\,.\,\widetilde{u}_{t+1} + \sqrt{1-\rho^2}\,.\,\widetilde{n}_{t+1}\right)\right). \tag{5.6}$$

En fait, la deuxième équation du Système 5.5 et l'équation précédente sont parfaitement identiques ! Ce qui sera « différent » dans ces deux équations n'est que la manière par laquelle on obtiendra des estimateurs des différents paramètres : si, dans un premier temps, on obtiendra des estimateurs avec un GARCH et vraisemblance normale, on fera par contre usage, dans un deuxième exercise, du P-ARCH avec erreurs suivant la Loi Généralisée des Erreurs.

La première ligne du Tableau 5.7c fournit à ce propos les estimateurs P-ARCH/fonction de vraisemblance g.e.d.$_{(v)}$, tandis que l'équation suivante reporte l'estimation d'un modèle GARCH effectuée à partir d'une fonction de vraisemblance normale [29]:

$$\begin{cases} y_t = \underset{[0,0044]}{0,0001} + \xi_t,\ \xi_t = u_t\,.\,\sigma_t,\ u_t \approx N(0,1) \\ \sigma_{t+1}^2 = \underset{[0,322]}{0,001} + \underset{[2,080]}{0,06}\,(|\xi_t| - \underset{[2,010]}{0,213}\,\xi_t)^2 + \underset{[8,608]}{0,910}\,\sigma_t^2 \end{cases}$$

avec $\ln L = 6025$.

En fait, ce dernier modèle n'est pas exactement un GARCH(1,1) mais, d'après Ding, Granger et Engle (1993, p. 100 et ss.), un modèle de type GJR [30]. Un test de rapport de vraisemblance est ici un chi-deux avec deux degrés de liberté, et il permet de rejeter le modèle GJR contre la spécification générale retenue dans la section précédente. Ceci signifie en particulier que si le prix Monte-Carlo de l'option sera différent dans les deux procédures que nous allons mettre en place, ceci ne sera pas vraiment

[29] t « robustes » entre crochets.

[30] Cf. Chapitre 4 Section 4.1 (Formule 4.4) pour la présentation du modèle GJR.

dû à la présence de l'*effet Black*[31], qui est en revanche pris en compte[32] dans les deux modèles.

Nous passons ensuite à convertir les paramètres en temps discret (Equation 5.6 et première ligne du Tableau 5.7c) vers leurs contreparties en temps continu en exploitant les formules d'approximation du Tableau 4.2 Chapitre 4, et à obtenir un estimateur du coefficient de corrélation ρ en régressant $\{y_t\}_{t=1,\ldots,T}$ sur $\{\sigma_t^2\}_{t=1,\ldots,T}$, où T désigne ici la taille de l'échantillons. Cet estimateur de ρ a été proposé par Lamoureux et Lastrapes (1993), et est repris ici en raison du fait que le schéma d'approximation dévéloppé dans le chapitre précédent ne rend pas compte d'une possible corrélation[33] ; une méthode alternative consiste à prendre en considération un modèle de type ARCH en temps discret convergeant faiblement vers une limite de diffusion du type envisagé dans le Système 3.5.

Le schéma suivant fournit un cadre synthétique des valeurs numériques employées dans les deux procédures. Dans ce schéma, $\widehat{\sigma}_T$ représente l'estimation du dernier écart-type conditionnel des accroissements du Dax ; la dernière valeur disponible de l'indice Dax date du 1er août 1994, où elle était égale à 2 154.

	GARCH ($v = 2$)	P-ARCH ($\delta,\ v) = (1,133,\ 1,191)$
$\widehat{\sigma}_T$	0,0128	0,0105
ρ	- 0,011	- 0,017
corr $(\sigma_{\text{GARCH}}, \sigma_{\text{P-ARCH}}) = 0,936$		
Paramètres en temps discret		
α	0,060	0,084
β	0,910	0,904
κ	0,213	0,405
Paramètres de diffusion		
φ	0,0273	0,0325
ψ	0,0990	0,0781

La corrélation entre les deux écarts-type conditionnels est très élevée ; néanmoins, la Figure 5.2 laisse soupçonner que leur dynamiques sont différentes dans l'espace d'état. Ce graphique montre en particulier la possibilité d'existence de trois régimes de volatilité : un régime de basse volatilité, un régime de volatilité moyenne et un régime de haute volatilité. Il semblerait que les deux dynamiques sont similaires pendant les régimes de haute et de basse volatilité.

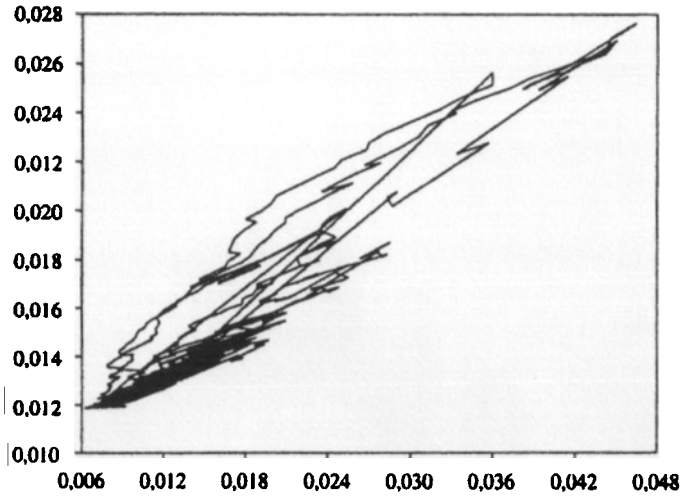
[31] Cf. Chapitre 4 Section 4.1.

[32] bien que d'une manière différente.

[33] Cf., cependant, Chapitre 4 Remarque 4.6. Voir, de plus, Mele (1997) pour un traitement plus fin de ce problème.

Figure 5.2

Abscisses : $\sigma_{\text{P-ARCH}}$. Ordonnées : σ_{GARCH}. (Indice Dax)



Aucune évidence graphique d'une corrélation «stable» n'est visible lors du régime de volatilité moyenne : en ce cas, ce régime semble au contraire laisser apparaître l'émergence de régimes ultérieurs. Si nous ne disposons pas de théories pouvant expliquer ces circonstances, nous remarquons cependant qu'en dépit de la haute corrélation entre les deux écarts-type, le *niveau* auquel les deux dynamiques ont lieu n'est pas le même. On observe en particulier que l'écart-type P-ARCH a tendance à être inférieur à l'écart-type GARCH ; de fait, la moyenne et la variance d'échantillon de l'écart-type P-ARCH sont $0,0118$ et $0,0049$; la moyenne et la variance d'échantillon de l'écart-type GARCH sont en revanche $0,0133$ et $0,0021$. L'écart-type P-ARCH est donc beaucoup plus volatile que l'écart-type GARCH[34], en étant ainsi plus riche d'informations.

La procédure Monte-Carlo que nous mettons en œuvre trouve ses fondements dans la Section 3.5 du Chapitre 3 et se base sur la méthode de la variable antithétique double. Les paramètres de diffusion du schéma récapitulatif précédent sont utilisés pour simuler le processus discrétisé dans les deux cas de figure. On génère alors 1 000 fois le couple des variables aléatoires normales réduites $\widetilde{u}_t$ et $\widetilde{n}_t$. Ces variables serviront ainsi à simuler 1 000 fois le chemin du prix d'ici à 60 jours ; pour chaque chemin, on calcule $C_i = (S_{i,T+\tau} - K)^+$, $i = 1,\ \ldots,\ 1\,000$, où $\tau = 60$. On obtient une première estimation du prix d'un call : $C^{(a)} = \dfrac{1}{1\,000}\displaystyle\sum_{i=1}^{1\,000} C_i$.

[34] Plus que le double.

On répète la même opération une deuxième fois, mais avec $-\widetilde{u}_t$ remplaçant $\widetilde{u}_t$. On obtient $C^{(b)}$. On effectue à nouveau cette opération, sauf que cette fois c'est $-\widetilde{n}_t$ qui doit remplacer $\widetilde{n}_t$. On calcule $C^{(c)}$. Le quatrième et dernier cycle est encore identique, mais $-\widetilde{u}_t$ et $-\widetilde{n}_t$ remplacent simultanément $\widetilde{u}_t$ et $\widetilde{n}_t$. On aura la quatrième estimation du prix du call, $C^{(d)}$. On calcule enfin la moyenne arithmétique $C_j^* = \frac{1}{4}\left(C^{(a)} + C^{(b)} + C^{(c)} + C^{(d)}\right)$. Cette procédure est répétée 100 fois. On obtiendra 100 valeurs, soit C_j^*, $j = 1, \ldots, 100$. On effectue ensuite la régression :

$$C_j^* = C + \eta_j \qquad (j = 1, \ldots, 100),$$

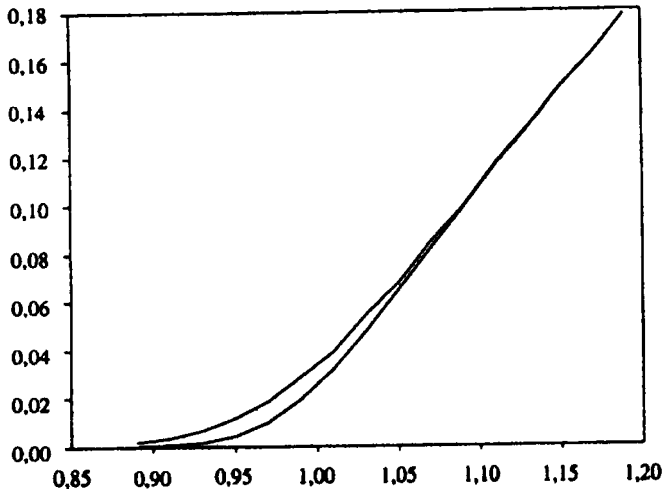
où $\{\eta_j\}_{j=1,\ldots,100}$ est la suite des résidus. L'estimateur de C de cette régression est l'estimateur du prix du call, et son écart-type constitue une mesure de l'erreur expérimentale de la procédure de Monte-Carlo.

Cette opération a été accomplie en correspondance de différents rapports $\frac{S}{K}$; un simple test t de Student basé sur l'écart-type asymptotique de la régression précédente nous permet de conclure que les prix calculés à travers un schéma de discrétisation basé sur l'Equation 5.6 sont statistiquement différents des prix calculés par l'intermédiaire de la deuxième équation du Système 5.5.

La Figure 5.3 montre les prix du call obtenus en utilisant la deuxième équation du Système 5.5 et l'Equation 5.6. Le prix généré par un modèle P-ARCH est toujours inférieure au prix généré par le modèle de Hull

Figure 5.3

Abscisses : $\frac{S}{K}$. Ordonnées : $\frac{C}{S}$. De haut en bas, $\frac{C}{S}$ Hull & White et $\frac{C}{S}$ P-ARCH. Evaluation Monte-Carlo.

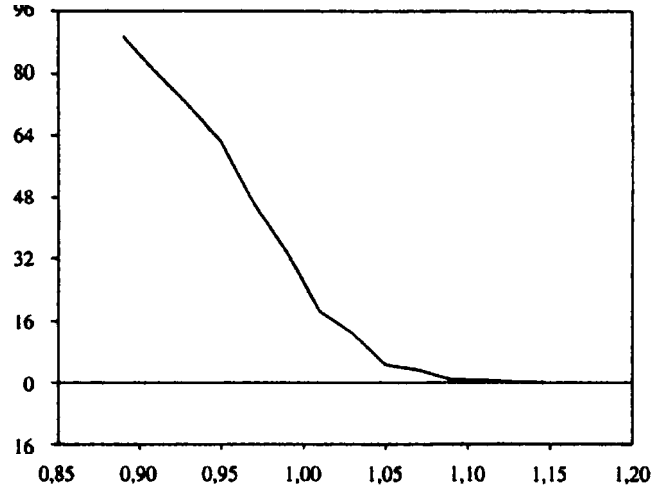


et White[35]. L'exception concerne les options *far-out-the-money*, cas où le biais est inexistant. Bien que la différence entre les deux modèles puisse apparaître d'un premier abord petite, le biais en pourcentage du modèle de Hull et White par rapport au deuxième est énorme. Soit C_1 et C_2 le prix de Hull et White et le prix calculé *via* l'Equation 5.6 ; nous définissons un biais comme $\frac{C_1 - C_2}{C_1}$. La Figure 5.4 montre ce biais en correspondance des différents rapports $\frac{S}{K}$.

Nous présentons en guise de conclusion une interprétation possible de ces derniers résultats et tenons à préciser en même temps que le caractère de cette interprétation ressemble plus à celui d'une conjecture qu'à celui d'un résultat établi sur des bases solides d'un point de vue mathématique.

Figure 5.4

Abscisses : $\frac{S}{K}$. Ordonnées : biais pourcentage prix Hull & White/prix P-ARCH $\left(\frac{C_1 - C_2}{C_1}\right)$



Nous observons d'abord que la différence la plus importante entre les deux modèles concerne les paramètres δ et υ. Ils sont fixés à $(2, 2)$ dans le modèle de Hull et White, et ils sont égaux à $(1.133, 1.191)$ dans la dernière formulation. Dans ce dernier cas, la distribution stationnaire des

[35] Nous sommes en train de commettre un abus de langage en qualifiant ce prix de *prix de Hull et White*. Nous n'exploitons ce terme que pour mettre en évidence le fait qu'il s'agit d'un prix calculé en exploitant un concept de volatilité qui est la variance.

erreurs est plus leptokurtique que le modèle de Hull et White : ceci devrait être une conséquence du Théorème 4.11 du chapitre précédent[36]. De fait, comme l'hypothèse $\delta = \upsilon$ ne peut pas être rejetée (cf. Tableau 5.9 première colonne, troisième ligne avant la dernière), la distribution en question est ici approximativement une t de Student généralisée d'après le Théorème 4.9 du chapitre précédent, tandis que la distribution de Hull et White est la t de Student. Cette circonstance, combinée au fait que l'estimateur de ρ est négatif, devrait pouvoir entraîner que la distribution stationnaire des variations des prix du dernier modèle est plus biaisée à gauche que la distribution de Hull et White. En conséquence, la probabilité d'observer des variations négatives sera plus élevée que la probabilité d'observer des variations positives pour les deux modèles, mais cette probabilité est encore plus élevée pour le dernier modèle. Comme la valeur d'un call est une fonction croissante du prix de l'actif sous-jacent au contrat, le dernier modèle devrait pouvoir générer en fin de compte des prix plus bas que les prix du modèle de Hull et White. Le contre-argument de cette interprétation est que, dans cette section, $\overline{\omega} = 0$ tandis que ce paramètre est un paramètre important dans les distributions reportées dans les Théorèmes 4.9 et 4.11, mais nous rappelons également[37] que la distribution du Théorème 4.11 a été intégrée numériquement en exploitant des valeurs très petites de $\overline{\omega}$.

[36] Cf. également les commentaires donnés après ce théorème.

[37] Cf. Chapitre 4 Annexe B.

5.5. Annexe

Tableaux 5.1
Dow Jones

Tableau 5.1a – Période : 3/1/1969-1/8/1994 (6 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	6,797	– 2,753	8,045	– 3,048	10,282	– 2,983	12,329	– 2,555
3	8,159	– 4,686	9,696	– 4,545	12,526	– 4,173	14,910	– 3,461
4	9,889	– 5,726	11,493	– 5,708	14,397	– 5,244	16,719	– 4,361
5	11,618	– 7,226	13,195	– 7,196	16,067	– 6,401	18,300	– 5,242

Tableau 5.1b – Période : 3/1/1969-1/8/1978 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	7,239	– 2,903	7,708	– 2,942	8,618	– 2,753	8,871	– 2,217
3	8,568	– 3,999	9,409	– 4,016	10,986	– 3,801	11,643	– 3,069
4	9,920	– 4,646	10,905	– 4,784	12,806	– 4,644	13,546	– 3,858
5	11,127	– 5,658	12,212	– 5,764	14,332	– 5,613	15,112	– 4,722

Tableau 5.1c – Période : 2/8/1978-1/3/1988 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	1,304	– 0,647	2,323	– 0,848	4,982	– 1,271	7,829	– 1,336
3	1,719	– 1,149	2,789	– 1,326	5,820	– 1,751	8,895	– 1,844
4	2,256	– 1,913	3,319	– 1,987	6,494	– 2,341	9,852	– 2,361
5	3,051	– 2,660	4,067	– 2,627	7,342	– 2,857	10,787	– 2,708

Tableau 5.1d – Période : 2/3/1988-1/8/1994 (1 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	1,156	– 0,429	1,717	– 0,568	2,608	– 0,643	3,247	– 0,177
3	1,217	– 1,177	1,827	– 1,360	2,746	– 1,146	3,424	– 1,190
4	1,940	– 2,167	2,672	– 2,216	3,393	– 1,164	3,858	– 1,207
5	2,980	– 2,861	3,701	– 2,849	4,033	– 2,235	4,202	– 1,544

Tableaux 5.2
S & P 500

Tableau 5.2a – Période : 3/1/1969-1/8/1994 (6 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	8,432	– 3,649	9,511	– 3,619	11,045	– 3,383	13,127	– 2,735
3	10,143	– 4,836	11,492	– 4,922	13,930	– 4,429	15,854	– 3,595
4	11,547	– 5,940	12,035	– 5,918	15,630	– 5,440	17,421	– 4,366
5	13,015	– 8,153	14,535	– 7,963	17,081	– 6,849	18,728	– 5,393

Tableau 5.2b – Période : 3/1/1969-1/8/1978 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	8,654	– 3,543	9,106	– 3,415	10,133	– 2,997	10,579	– 2,401
3	10,287	– 4,277	10,947	– 4,345	12,349	– 4,023	13,108	– 3,215
4	11,362	– 4,888	12,324	– 5,010	14,017	– 4,775	14,743	– 3,965
5	12,437	– 6,275	13,501	– 6,278	15,376	– 5,857	16,121	– 4,782

Tableau 5.2c – Période : 2/8/1978-1/3/1988 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	2,356	– 1,189	3,187	– 1,391	5,364	– 1,536	7,159	– 1,325
3	3,115	– 1,560	4,196	– 1,816	6,645	– 1,948	8,405	– 1,778
4	3,538	– 1,984	4,753	– 2,292	7,294	– 2,471	9,263	– 2,174
5	3,972	– 3,139	5,321	– 3,181	7,959	– 3,088	9,956	– 2,733

Tableau 5.2d – Période : 2/3/1988-1/8/1994 (1 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	1,530	– 0,659	1,984	– 0,712	2,877	– 0,818	3,227	– 0,728
3	1,778	– 1,271	2,207	– 1,245	3,297	– 1,313	3,870	– 1,025
4	2,387	– 2,337	2,769	– 2,110	3,936	– 1,844	4,382	– 1,219
5	3,437	– 3,366	3,679	– 2,885	4,639	– 2,442	4,711	– 1,653

Tableau 5.3

Dax (Allemagne) – Période : 2/1/1986-1/8/1994 (2 238 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	8,246	– 3,831	8,522	– 3,504	8,867	– 2,735	9,517	– 2,202
3	10,924	– 5,408	11,130	– 4,927	11,445	– 3,926	12,376	– 2,921
4	13,498	– 6,269	13,504	– 5,717	13,615	– 4,545	14,036	– 3,350
5	15,783	– 7,497	15,407	– 6,747	15,043	– 5,347	14,965	– 3,938

Tableau 5.4

CAC-40 (France) – Période : 5/1/1988-1/8/1994 (1 714 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	3,584	– 1,667	4,315	– 1,705	5,927	– 1,651	7,851	– 1,533
3	4,498	– 2,610	5,254	– 2,566	6,859	– 2,448	8,839	– 2,133
4	5,640	– 3,882	6,367	– 3,493	8,012	– 3,104	9,812	– 2,526
5	7,256	– 5,121	7,615	– 4,400	9,039	– 3,638	10,474	– 2,897

Tableau 5.5

NSE (Japon) – Période : 12/8/1986-1/8/1994 (2 080 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	10,923	– 5,251	11,883	– 4,748	12,408	– 3,550	10,790	– 2,431
3	14,750	– 6,570	15,188	– 6,101	14,837	– 4,593	12,978	– 3,090
4	17,744	– 7,173	17,844	– 6,920	16,605	– 5,383	14,172	– 3,662
5	20,464	– 7,543	20,264	– 7,422	18,131	– 5,924	15,116	– 4,119

Tableau 5.6

FT-100 (Royaume-Uni) – Période : 3/1/1984-1/8/1994 (2 760 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	5,190	– 2,270	5,911	– 2,273	7,819	– 2,140	10,338	– 2,030
3	6,720	– 2,991	7,525	– 2,944	9,585	– 2,644	12,657	– 2,328
4	7,723	– 3,782	8,475	– 3,729	10,389	– 3,192	13,241	– 2,608
5	8,764	– 4,182	9,505	– 4,163	11,081	– 3,554	13,469	– 2,827

Tableaux 5.7
Modèles P-ARCH

$$\begin{cases} (1-\varphi_1 L-\varphi_2 L^2)\, y_t = \mu + \xi_t, \qquad \xi_t = u_t \,.\, \sigma_t, \qquad u_t \approx \text{i.i.g.e.d. } (\upsilon) \\ \sigma_{t+1}^{\delta} = \omega + \alpha\,(|\xi_t| - \kappa\xi_t)^{\delta} + \beta\sigma_t^{\delta} \end{cases}$$

[t «robustes» entre crochets]

Tableau 5.7a – Dow Jones

Période	μ	φ_1	φ_2	ω	α	β	κ	υ	δ	ln L
3/1/1969 1/8/1994	0,0001 [1,362]	0,062 [3,362]	– 0,015 [–1,293]	0,00002 [1,316]	0,056 [5,851]	0,941 [38,950]	0,296 [4,336]	1,275 [6,509]	1,358 [8,674]	22 409
3/1/1969 1/8/1978	– 0,0001 [–0,286]	0,202 [3,364]	– 0,048 [–7,86]	$6,9 \cdot 10^{-6}$ [0,279]	0,058 [2,506]	0,938 [39,183]	0,372 [2,385]	1,578 [7,787]	1,539 [2,312]	8 466
2/8/1978 1/3/1988	0,0001 [0,304]	0,007 [0,115]	∴	0,00002 [0,240]	0,061 [2,233]	0,924 [15,829]	0,221 [2,856]	1,176 [6,028]	1,574 [1,596]	8 212
2/3/1988 1/8/1994	0,0004 [0,773]	∴	∴	$7 \cdot 10^{-7}$ [0,283]	0,010 [2,006]	0,978 [31,973]	0,986 [1,005]	1,720 [3,573]	1,699 [2,234]	5 722

Tableau 5.7b – S & P 500

Période	μ	φ_1	φ_2	ω	α	β	κ	υ	δ	ln L
3/1/1969 1/8/1994	0,0001 [1,337]	0,063 [3,784]	– 0,013 [–1,368]	0,00003 [0,336]	0,0562 [5,772]	0,944 [30,948]	0,388 [3,920]	1,189 [6,641]	1,232 [1,948]	22 770
3/1/1969 1/8/1978	– 0,00001 [–0,225]	0,211 [3,487]	– 0,044 [–0,722]	0,00002 [0,274]	0,060 [2,525]	0,940 [37,679]	0,468 [2,508]	1,371 [8,111]	1,345 [1,978]	8 666
2/8/1978 1/3/1988	0,00007 [0,349]	0,019 [0,338]	∴	0,00005 [0,309]	0,066 [2,239]	0,922 [15,728]	2,346 [2,129]	1,099 [6,160]	1,345 [1,791]	8 298
2/3/1988 1/8/1994	0,0003 [0,696]	∴	∴	$2,2 \cdot 10^{-7}$ [0,209]	0,008 [2,004]	0,981 [30,738]	0,796 [1,004]	1,717 [3,763]	1,840 [2,8434]	5 803

μ	φ_1	φ_2	ω	α	β	κ	υ	δ	ln L
0,0002 [0,271]	∴	∴	0,00008 [0,248]	0,084 [2,656]	0,904 [2,061]	0,405 2,149	1,191 4,400	1,133 2,451	6 948
0,0002 [0,295]	0,037 [0,558]	∴	0,00012 [0,226]	0,077 [1,911]	0,898 [11,275]	0,426 [2,082]	1,223 [4,398]	1,288 [2,397]	5 403
$-2 \cdot 10^{-5}$ [–0,030]	0,096 [1,541]	$3 \cdot 10^{-5}$ [$5 \cdot 10^{-4}$]	$5 \cdot 10^{-5}$ [0,315]	0,132 [2,883]	0,857 [18,577]	0,478 [2,277]	1,142 [7,764]	1,143 [2,125]	6 677
0,0005 [0,990]	0,0597 [0,981]	∴	0,00001 [0,299]	0,0798 [2,022]	0,860 [15,965]	0,193 [2,128]	1,457 [3,739]	1,842 [2,128]	9 238

Tableau 5.8 – *Dow Jones et S & P 500*

Tests de spécification basés sur les moments conditionnels (t de Student) et tests de Wald pour : la t de Student généralisée non conditionnelle ($\upsilon = \delta$), la normalité conditionnelle ($\upsilon = 2$), la distribution conditionnelle de Laplace ($\delta = 1$)

Conditions d'orthogonalité et hypothèses distributives	Dow Jones				S & P 500			
	69-94	69-78	78-88	88-94	69-94	69-78	78-88	88-94
$E(\widehat{u_t}) = 0$	0,714	0,535	0,832	− 0,529	1,002	0,050	0,187	0,101
$E(\widehat{u_t^2}) = 1$	0,357	− 0,140	0,234	− 1,450	0,136	− 0,093	− 0,031	1,302
$E(\widehat{u_t} \lvert \widehat{u_t} \rvert) = 0$	− 0,318	1,082	0,084	− 0,095	1,008	0,671	1,170	0,209
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-1}^2} - 1)) = 0$	1,402	1,354	0,757	0,972	1,230	1,531	0,840	0,732
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-2}^2} - 1)) = 0$	− 0,176	− 1,544	0,629	− 0,928	0,269	− 0,224	0,484	− 0,172
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-3}^2} - 1)) = 0$	0,734	− 1,572	0,969	− 1,372	0,532	− 1,539	0,925	− 1,270
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-4}^2} - 1)) = 0$	− 0,281	0,713	− 0,019	0,563	− 1,019	− 1,095	− 0,223	0,442
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-5}^2} - 1)) = 0$	0,820	0,823	0,976	− 0,666	− 1,333	1,938	1,592	0,124
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-6}^2} - 1)) = 0$	− 0,467	− 0,345	− 1,322	0,320	− 0,945	− 0,535	− 1,322	0,936
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-1}} = 0$	− 1,205	0,491	− 0,811	− 1,293	− 1,129	0,644	− 0,965	− 0,970
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-2}} = 0$	− 1,295	1,318	− 1,015	− 1,102	− 1,490	1,047	− 1,114	− 1,771
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-3}} = 0$	− 0,899	0,370	− 0,772	− 1,021	− 0,622	1,590	− 0,714	− 1,331
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-4}} = 0$	0,692	− 0,895	0,752	1,281	0,720	− 0,502	0,623	1,820
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-5}} = 0$	− 0,559	− 0,111	− 1,280	0,495	0,143	− 0,831	0,122	0,004
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-6}} = 0$	− 0,118	0,056	− 0,869	0,884	− 0,066	0,061	− 1,075	0,846
$E(\widehat{u_t u_{t-1}}) = 0$	1,462	0,152	1,305	0,460	1,522	− 0,254	1,657	1,184
$E(\widehat{u_t u_{t-2}}) = 0$	1,172	0,191	0,986	0,156	0,783	− 0,273	0,306	− 0,394
$E(\widehat{u_t u_{t-3}}) = 0$	0,739	0,559	0,581	− 0,098	0,179	1,124	− 0,520	− 0,970
$E(\widehat{u_t u_{t-4}}) = 0$	− 0,820	0,879	− 1,389	− 1,160	− 0,707	0,017	− 0,448	− 0,771
$E(\widehat{u_t u_{t-5}}) = 0$	0,528	0,301	− 0,217	0,426	0,899	1,017	− 0,737	0,616
$E(\widehat{u_t u_{t-6}}) = 0$	− 1,422	− 0,980	− 0,565	− 1,382	− 1,207	− 1,495	− 0,139	− 1,637
$\upsilon = \delta : \chi_1^2$	0,140	0,004	0,132	≈ 0	0,136	0,007	0,270	0,012
$\upsilon = 2 : \chi_1^2$	13,697	4,335	17,842	0 338	20,518	13,897	26 136	0,385
$\upsilon = 1 : \chi_1^2$	1,971	8,134	0,814	3,238	1 115	4,793	0,256	3,472

Tableau 5.9

Dax, Cac-40, Nse, Ft-100

Tests de spécification basés sur les moments conditionnels (t de Student) et tests de Wald pour : la t de Student généralisée non conditionnelle ($\upsilon = \delta$), la normalité conditionnelle ($\upsilon = 2$), la distribution conditionnelle de Laplace ($\delta = 1$)

Conditions d'orthogonalité et hypothèses distributives	Dax	Cac-40	Nse	Ft-100
$E(\widehat{u_t}) = 0$	0,885	0,618	0,384	− 0,355
$E(\widehat{u_t^2}) = 1$	0,612	0,252	0,272	0,288
$E(\widehat{u_t} \lvert \widehat{u_t} \rvert) = 0$	− 0,074	− 0,692	0,373	− 1,159
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-1}^2} - 1)) = 0$	0,135	0,285	0,907	0,883
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-2}^2} - 1)) = 0$	− 0,144	0,596	0,729	1,125
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-3}^2} - 1)) = 0$	1,276	0,660	− 0,372	0,853
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-4}^2} - 1)) = 0$	− 0,948	0,199	− 0,052	− 1,257
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-5}^2} - 1)) = 0$	0,799	− 0,229	0,424	0,703
$E((\widehat{u_t^2} - 1)(\widehat{u_{t-6}^2} - 1)) = 0$	− 0,309	− 0,528	− 1,796	− 1,065
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-1}}) = 0$	− 1,113	0,323	− 1,026	− 0,075
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-2}}) = 0$	− 1,002	− 0,867	− 1,397	− 1,241
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-3}}) = 0$	− 0,997	− 0,448	0,338	− 0,506
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-4}}) = 0$	0,950	0,976	0,781	1,255
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-5}}) = 0$	0,215	− 1,102	− 0,847	− 1,235
$E((\widehat{u_t^2} - 1)\widehat{u_{t-6}}) = 0$	− 0,031	1,287	0,973	− 0,104
$E(\widehat{u_t u_{t-1}}) = 0$	1,478	1,117	1,573	1,224
$E(\widehat{u_t u_{t-2}}) = 0$	− 0,663	− 0,688	0,603	− 0,122
$E(\widehat{u_t u_{t-3}}) = 0$	− 0,470	0,051	0,535	0,710
$E(\widehat{u_t u_{t-4}}) = 0$	1,528	1,476	1,891	0,503
$E(\widehat{u_t u_{t-5}}) = 0$	0,942	0,532	0,302	1,290
$E(\widehat{u_t u_{t-6}}) = 0$	− 0,925	0,450	0,400	0,825
$\upsilon = \delta : \chi_1^2$	0,026	0,004	0,190	1,258
$\upsilon = 2 : \chi_1^2$	9,001	8,346	34,067	2,001
$\upsilon = 1 : \chi_1^2$	0,495	0,643	1,029	1,373

Tableaux 5.10
Tests diagnostiques (Dow Jones)

Tableau 5.10a – Période : 3/1/1969-1/8/1994 (6 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 2,451	1,548	– 2,338	1,299	– 1,493	0,775	0,152	0,260
3	– 3,679	1,760	– 3,537	1,599	– 2,584	1,038	– 0,791	0,426
4	– 3,923	1,536	– 3,865	1,343	– 3,218	0,950	– 1,378	0,347
5	– 3,673	0,832	– 3,638	0,669	– 3,055	0,508	– 1,403	0,030

Tableau 5.10b – Période : 3/1/1969-1/8/1978 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 0,726	0,690	– 0,896	0,688	– 0,422	0,444	0,616	0,160
3	– 1,528	1,133	– 1,725	1,147	– 1,288	0,767	– 0,244	0,296
4	– 2,091	1,100	– 2,340	1,180	– 1,942	0,789	– 0,793	0,316
5	– 2,193	0,078	– 2,498	0,322	– 2,116	0,262	– 0,971	– 0,061

Tableau 5.10c – Période : 2/8/1978-1/3/1988 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 3,518	1,702	– 3,393	1,443	– 2,646	0,913	– 1,448	0,444
3	– 4,293	1,729	– 4,157	1,599	– 3,438	1,187	– 2,173	0,593
4	– 4,150	1,495	– 4,160	1,444	– 3,756	1,099	– 2,520	0,513
5	– 3,729	1,271	– 3,845	1,046	– 3,638	0,900	– 2,438	0,360

Tableau 5.10d – Période : 2/3/1988-1/8/1994 (1 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 0,432	0,516	– 0,053	0,388	0,731	0,112	1,304	– 0,073
3	– 1,038	0,288	– 0,740	0,108	0,042	0,037	0,815	– 0,029
4	– 0,898	– 0,223	– 0,554	– 0,428	– 0,037	– 0,154	0,551	– 0,157
5	– 0,444	– 0,614	– 0,033	– 0,778	0,241	– 0,539	0,597	– 0,227

Tableaux 5.11
Tests diagnostiques (S & P 500)

Tableau 5.11a – Période : 3/1/1969-1/8/1994 (6 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 0,938	1,098	– 0,637	0,826	– 0,248	0,445	0,957	0,091
3	– 2,252	1,714	– 1,842	1,376	– 1,261	0,889	0,086	0,337
4	– 3,032	1,702	– 2,627	1,512	– 2,049	1,001	– 0,663	0,452
5	– 3,205	0,208	– 2,924	0,207	– 2,437	0,103	– 1,088	– 0,137

Tableau 5.11b – Période : 3/1/1969-1/8/1978 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 0,445	0,352	0,408	0,269	0,885	0,553	1,939	– 0,101
3	– 0,426	1,167	– 0,338	0,843	– 0,772	0,708	1,219	0,142
4	– 1,473	1,361	– 1,183	1,136	– 1,258	0,106	0,436	0,242
5	– 1,960	0,299	– 1,691	0,155	– 1,255	0,007	– 0,036	– 0,237

Tableau 5.11c – Période : 2/8/1978-1/3/1988 (2 500 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 2,513	1,399	– 2,066	1,033	– 1,700	0,698	– 0,744	0,325
3	– 3,344	1,639	– 2,805	1,299	– 2,472	1,004	– 1,449	0,491
4	– 3,499	1,863	– 3,047	1,557	– 2,913	1,211	– 1,876	0,609
5	– 3,514	1,024	– 3,185	0,793	– 3,185	0,703	– 2,148	0,255

Tableau 5.11d – Période : 2/3/1988-1/8/1994 (1 673 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	– 0,942	0,519	– 0,781	0,419	– 0,502	0,222	0,261	0,014
3	– 1,067	0,293	– 1,102	0,322	– 0,760	0,174	0,709	0,034
4	– 1,080	– 0,122	– 1,014	0,010	– 0,709	0,045	– 0,036	– 0,001
5	– 0,859	0,913	– 0,684	– 0,655	– 0,531	– 0,225	– 0,007	– 0,139

Tableau 5.12

Tests diagnostiques : Dax (Allemagne)
Période : 2/1/1986-1/8/1994 (2 238 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	- 1,282	0,151	- 1,118	0,138	- 0,979	0,123	- 0,343	≈ 0
3	- 0,835	- 0,134	- 0,752	- 0,046	- 0,765	- 0,046	- 0,208	- 0,158
4	- 0,347	- 0,428	- 0,406	- 0,181	- 0,379	- 0,096	- 0,253	- 0,158
5	0,100	- 1,195	- 0,117	- 0,850	- 0,165	- 0,603	- 0,418	- 0,580

Tableau 5.13

Tests diagnostiques : CAC-40 (France)
Période : 5/1/1988-1/8/1994 (1 714 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	- 1,301	0,543	- 0,702	0,338	- 0,184	0,033	- 0,952	- 0,150
3	- 1,502	0,403	- 0,939	0,241	- 0,185	- 0,016	0,989	- 0,206
4	- 1,296	0,017	- 0,836	0,039	- 0,089	0,018	1,083	- 0,130
5	- 0,874	- 0,942	- 0,595	- 0,580	- 0,069	- 0,262	0,905	- 0,324

Tableau 5.14

Tests diagnostiques : NSE (Japon)
Période : 12/8/1986-1/8/1994 (2 080 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	- 0,962	0,066	- 1,289	0,112	- 0,796	- 0,041	0,027	- 0,119
3	- 0,526	0,352	- 0,783	0,378	- 0,252	0,118	0,414	- 0,041
4	- 0,666	0,447	- 0,887	0,415	- 0,306	0,060	0,344	- 0,101
5	- 0,758	0,038	- 0,916	0,458	- 0,287	0,052	0,356	- 0,111

Tableau 5.15

Tests diagnostiques : FT-100 (Royaume-Uni)
Période : 3/1/1984-1/8/1994 (2 760 observations)

m	$\varepsilon/\sigma^* = 0,75$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,00$		$\varepsilon/\sigma^* = 1,50$		$\varepsilon/\sigma^* = 2,00$	
	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie	bds	entropie
2	- 1,559	0,409	- 1,538	0,341	- 1,252	0,255	- 0,569	0,057
3	- 1,433	0,470	- 1,384	0,345	- 1,199	0,302	- 0,487	0,132
4	- 1,373	0,269	- 1,254	0,276	- 1,185	0,216	- 0,581	0,149
5	- 1,128	0,658	- 1,084	0,525	- 1,061	0,452	- 0,598	0,307